El mercado de información perfecta. Una propuesta.

"Donde se encuentra el ejército, los precios son más elevados; cuando los precios suben, las riquezas se agotan. Cuando las riquezas del país se agotan los ciudadanos son abrumados con impuestos".

Sun Tzu El arte de la guerra
(época de los Reinos Combatientes, 481-221 a.C.)
Traducción de Fernando Montes de Santiago

INTRODUCCIÓN

Desde antiguo, los hombres han sentido cierta curiosidad por los procesos que determinan el precio al que se intercambian los bienes, porque desde los más tempranos tiempos entendieron que de estos misteriosos mecanismos dependen la prosperidad o la miseria de las gentes y los Estados. En este sentido, debemos reconocer que el marginalismo construido uno de las estructuras teóricas más elaboradas y con más potencia explicativa; igualmente, empero, hemos de admitir que entre las mallas de su sólido (al menos en cuanto a coherencia interna) entramado determinista quedan también algunos huecos. Mi intención principal en este trabajo es, precisamente, proponer una posible solución para uno de tales "huecos": el equilibrio de un mercado bajo condiciones de "monopolio bilateral" (es decir, en el que un monopolio de oferta se enfrenta a uno de demanda). Más adelante, como veremos, esta misma solución nos permitirá de paso escapar a la necesidad de trabajar siempre con funciones de producción homogéneas de grado 1. Pero no nos adelantemos a los acontecimientos.

Aunque mi propuesta no es complicada, me parece de la mayor importancia que el lector pueda seguir punto por punto lo que voy haciendo, por lo que empezaré con un ejemplo muy sencillo, casi infantil, sobre una economía cerrada, sin producción, basada en el intercambio puro, entre dos únicos agentes, de bienes cuyas cantidades totales se determinan de forma exógena.

I

Así pues, imaginemos a dos náufragos, Alberto (A) y Bernardo (B), abandonados ambos en sendas islas desiertas, a la vista el uno del otro pero separados por una lengua de mar infranqueable, infestada de remolinos y de tiburones. En cada isla hay una única palmera: la de la isla de Alberto de cocos (C), y la de la isla de Bernardo de dátiles (D). Estas palmeras no requieren ni admiten cuidados, por lo que la "cosecha" de cada período se comporta como una variable exógena. Entre las dos islas, los náufragos han tendido un cabo de palmera a palmera, tirando del cual pueden deslizar de una isla a otra una cesta con productos en cada dirección (una cesta de ida y una de vuelta), de tal modo que el engaño es imposible, por cuanto que cualquiera de los dos pueda bloquear el deslizamiento a medio camino si observa que el contenido de la cesta que se le acerca no es el pactado.

Consideraremos, además, que cocos y dátiles son bienes perecederos que no es posible conservar de un período a otro. De este modo tendremos, pues un sistema de intercambio comercial puro, sin posibilidad de coerción ni engaño, sin producción y reducido a los mínimos elementos indispensables: dos bienes y dos individuos (que se pueden considerar oferentes y demandantes al mismo tiempo, pues cada uno ofrece un producto a cambio de otro).

Designaremos, pues, las cantidades iniciales de cocos y dátiles mediante los símbolos $\bar{C}$ y $\bar{D}$, y las cantidades finalmente consumidas por A y B mediante C_A, C_B, D_A y D_B. Tal como hemos definido el modelo, pueden definirse en él dos tipos de identidad contable: las que establecen la igualdad entre las cantidades iniciales y las consumidas ([1] y [2]).

$$\bar{C} = C_A + C_B \qquad [1]$$

$$\bar{D} = D_A + D_B \qquad [2]$$

y las que expresan la igualdad de créditos y débitos en el balance de cada individuo (donde definiremos P como el precio de un coco en términos de dátiles) ([3] y [4]).

$$P\bar{C} = PC_A + D_A \qquad [3]$$

$$\bar{D} = PC_B + D_B \qquad [4]$$

De estas cuatro ecuaciones, hemos de suprimir una cualquiera, puesto que forman un sistema linealmente dependiente en el cualquiera de ellas puede ser obtenida por combinación lineal de las otras tres:

$$[3] \qquad P\bar{C} = PC_A + D_A$$

$$\text{(comb. [3], [1] y [2])} \quad P(\bar{C} - C_A) = D_A = \bar{D} - D_B$$

$$\overline{\qquad\qquad}$$

$$C_B$$

$$[4] \qquad PC_B + D_B = \bar{D}$$

Así pues, las restricciones contables serán tres:

$$[1] \qquad \bar{C} = C_A + C_B$$

$$[2] \qquad \bar{D} = D_A + D_B$$

$$[3] \qquad PC_B = D_A \qquad \text{(comb. de [1] y [3])}$$

Pero está claro que con las identidades contables no hay suficiente. En busca de una solución de corte marginalista, definiremos unas funciones de utilidad V_A y V_B, respectivamente para Alberto y Bernardo, continuas, derivables y que dependan únicamente de las cantidades consumidas por cada uno ([5] y [6]):

$$[5] \qquad V_A(C_A, D_A)$$

$$[6] \qquad V_B(C_B, D_B)$$

De este modo, cuando Alberto maximice su función de utilidad obtendrá lo siguiente:

$$V_A(C_A, D_A) = V_A(C_A, PC_B) = V_A(C_A, P(\bar{C} - C_A))$$

$$\frac{dV_A}{dC_A} = \frac{\partial V_A}{\partial C_A} + \frac{\partial V_A}{\partial D_A}\left(\frac{DP}{DC_A}(\bar{C} - C_A) - P\right) = 0$$

$$\frac{\dfrac{\partial V_A}{\partial C_A}}{\dfrac{\partial V_A}{\partial D_A}} = P - \frac{dP}{dC_A}\,\frac{(\bar{C} - C_A)}{C_B}$$

Y, de igual modo, cuando lo haga Bernardo:

$$\frac{\dfrac{\partial V_B}{\partial C_B}}{\dfrac{\partial V_B}{\partial D_B}} = P + \frac{dP}{dC_B}\,C_B$$

Aquí queda ya definido todo el problema de la determinación del precio de equilibrio. Porque las derivadas parciales de las funciones de utilidad son algo que suponemos conocido, y P es una incógnita igualmente despejable, pero ¿qué decir de las derivadas dP/dC_A y dP/dC_B? Tales derivadas hacen referencia al conocimiento que sobre los mecanismos que rigen el mercado tienen los propios agentes que en él operan y, por lo tanto, no podemos "a priori" determinar su valor sin establecer supuestos al respecto. Es principalmente en los distintos supuestos que se aplican para resolver este punto en lo que se distinguen los diferentes modelos de mercado que reconoce la teoría neoclásica.

Así, por ejemplo, en competencia perfecta se presupone que los individuos carecen de cualquier tipo de información sobre cómo puede reaccionar el sistema ante variaciones de las cantidades ofrecidas o demandadas por ellos y, por lo tanto, actúan como si el precio fuese realmente insensible a dichas variaciones (esto es, como si la derivada del precio respecto a las demás variables fuese siempre cero). Bien es verdad que, tradicionalmente, esto se justifica para sistemas en los que la cantidad de pequeños oferentes y demandantes es tan pequeña que la capacidad de cada uno para modificar conscientemente el precio se considera despreciable; analíticamente, sin embargo, el supuesto que se introduce no se refiere a la cantidad de agentes sino a su grado de información sobre el sistema y, por lo tanto, igual se puede aplicar a dos que a un millón de individuos. En definitiva, pues, la solución de competencia perfecta consiste en establecer que:

$$\frac{dP}{dC_A} = \frac{dP}{dC_B} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\dfrac{\partial V_A}{\partial C_A}}{\dfrac{\partial V_A}{\partial D_A}} = \frac{\dfrac{\partial V_B}{\partial C_B}}{\dfrac{\partial V_B}{\partial D_B}} = P$$

Otra posible solución es la de monopolio. En ella, un agente sí está en condiciones de considerar la incidencia de las cantidades por él ofrecidas o demandadas sobre el producto, pero los otros no. Como en el caso anterior, desde el punto de vista analítico no es el control por parte de ese individuo de algún recurso escaso (lo que comúnmente entendemos por "monopolio") lo que determina esa diferencia, sino un simple supuesto de comportamiento. En nuestro caso, pues, un individuo (pongamos Alberto) determinaría su demanda (u oferta) como en competencia perfecta:

$$\frac{dP}{dC_A} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\dfrac{\partial V_A}{\partial C_A}}{\dfrac{\partial V_A}{\partial DA}} = P$$

en tanto que el otro (es decir, Bernardo) tomaría como dada esa ecuación y determinaría a partir de ella la derivada dP/dC_B a partir de la cual se obtendría su propia función de demanda/oferta. Esto le será ventajoso, desde luego, pero debemos insistir en que la causa no es el monopolio de un recurso, sino el de una información.

Pero, ¿qué ocurre cuando *todos* los individuos tienen perfecta información sobre las condiciones que rigen el sistema? Esta pregunta es particularmente importante, pues parece lógico pensar que los agentes económicos no son ingenuos y, por lo tanto, tienden a emplear toda la información que pueden obtener, lo cual debería, en principio, acercarles a la información perfecta, especialmente cuanto más a largo plazo sea el equilibrio que estamos estudiando. La figura que en el ámbito de la Teoría Neoclásica responde a este esquema es la del "monopolio bilateral", por más que su nombre, como hemos visto que ocurría también con los otros modelos, hace referencia a justificaciones más o menos admisibles de las condiciones de información del sistema, en lugar de señalar simplemente dichas condiciones (en este caso, condiciones de información perfecta, sin importar el número de los agentes contratantes o su grado de control de los bienes con que se comercia). Ahora bien, en este caso la Teoría nos dice que no existe una única solución de equilibrio, ya que, para expresarlo en términos de nuestro esquema, Alberto tomaría para calcular dP/dC_A la función de demanda de Bernardo *en competencia perfecta* (en nomenclatura neoclásica diríamos que toma como curva de coste/ingreso marginal la derivada de la curva de coste/ingreso marginal de Bernardo, pero hay que tener en cuenta que el modelo neoclásico, aunque ambivalente, está pensado principalmente para el mercado con producción), y Bernardo haría lo propio con la de Alberto, con lo que no se obtendría un punto de equilibrio, sino dos (uno que sería el "deseado por Alberto" y el otro el "deseado por Bernardo"): "los objetivos son inconsistentes y, por tanto, el precio bajo monopolio bilateral se dice que es indeterminado" (*). ¿Cómo asimila la economía neoclásica esta indeterminación? Elijo como muestra el comentario de Stigler tanto por su claridad como por su honradez expositiva. Después de decirnos que, de cualquier manera, este tipo de mercado "se encuentra raramente (excepto en el mercado de trabajo)"(*) (lo cual, como sabemos, sólo se justifica si creemos que la información perfecta no se da más que en los auténticos "monopolios bilaterales"), nos explica:

> "La indeterminación tiene un sentido especial: las condiciones de costes y demanda no son suficientes para determinar el precio y la cantidad. Obviamente, si miramos hacia atrás, en un año cualquiera habrá habido una cantidad y un precio definidos, pero éstos habrán sido determinados por factores a la teoría tradicional: habilidad en la negociación, la opinión pública, el lanzamiento de una moneda, un matrimonio inteligente... Decir que una situación es indeterminada es una forma refinada de decir que ésta no se entiende completamente."(*)

(*) Las tres citas proceden de:
G.J. STIGLER La teoría de los Precios
EDITORIAL REVISTA DE DERECHO PRIVADO
Madrid, 1968
Traducción de Joan Hortalà

Es aquí adonde apunta mi crítica. En primer lugar, porque el sistema planteado por los neoclásicos no está indeterminado, sino sobredeterminado, es decir, la información del sistema es excesiva (y contradictoria), así que podemos obtener un resultado u otro según las ecuaciones que combinemos para obtenerlo. Esto se debe a que, de hecho, en él no se supone que los individuos conozcan la totalidad de la mecánica del sistema, sino que cada uno conoce y tiene en cuenta las ecuaciones que determinan el comportamiento del otro, pero olvida o ignora, en cambio, que ese otro es igualmente capaz de tener en cuenta las suyas propias; ¡así no es extraño que no puedan llegar a acuerdo alguno!.

Se impone, pues, la necesidad de construir un solo sistema para hallar la solución, en lugar de buscar primero la oferta y la demanda de cada uno y establecer luego el resultado, pues sólo así podremos tener en cuenta todas las interacciones. Adelanto ya la solución, que luego pasaré a demostrar: el resultado en condiciones de información perfecta en una economía sin producción es equivalente al de competencia perfecta. Hay varias maneras de demostrar esto, pero quizá la más elegante sea la que pasa por la vía de la reducción al absurdo.

Simplemente, de las ecuaciones que, según hemos visto, forman nuestro sistema, podemos deducir que

$$\frac{dC_A}{dC_B} = \frac{d(\bar{C} - C_B)}{dC_B} = -1$$

de lo que podemos deducir que

$$\frac{dP}{dC_A} = -\frac{dP}{dC_B}$$

Ahora bien, si suponemos que ambas derivadas tienen valores distintos de cero, esto es absurdo. Significaría que si un aumento de la demanda de cocos por parte de Alberto lleva a un incremento del precio de estos, necesariamente un aumento igual de la demanda del mismo bien por parte de Bernardo llevaría a un *decremento* de dicho precio de la misma magnitud. Por lo tanto, no nos queda sino la opción de admitir que ambas derivadas son iguales a cero:

$$\frac{dP}{dC_A} = \frac{dP}{dC_B} = 0$$

Soy consciente de que esta demostración, por su propia sencillez, resulta bastante sospechosa de falta de rigor, y por ello he preparado otra, menos ágil, menos elegante, pero que quizás inspire más confianza y que, de todos modos, nos ayudará más adelante porque sigue la misma mecánica que luego emplearemos para trabajar con mercados en los que sí exista la posibilidad de producir. Se trata de construir una función Lagrangeana en la que se optimice una función U tal que se garantice que si U es óptima, también lo serán V_A y V_B, es decir, que si U'=0 entonces:

$$V'_A = 0 \qquad y \qquad V'_B = 0$$

Hay que tener en cuenta que esta función puede tener una forma muy sencilla: de hecho, si podemos garantizar (como efectivamente, dadas las condiciones que hemos establecido en el modelo, podemos) que las derivadas de las utilidades de los individuos respecto a los bienes consumidos por cada uno son todas positivas o cero, bastará una función de la forma $V = V_A + V_B$. Optimizaremos entonces esta "función de utilidad" U sujeta a *todas* las restricciones del sistema que conocemos

$$\phi = V + \lambda (\bar{C} - (C_A + C_B) + \mu (\bar{D} - (D_A + D_B)) + \upsilon (PC_B - D_A)$$

y derivaremos respecto a todas las variables del sistema excepto P (que no nos conduciría a un óptimo, pues la derivada segunda respecto a esta variable sería nula), es decir, C_A, C_B, D_A y D_B. Despejando obtendremos entonces una nueva ecuación [7]:

$$[7] \qquad \frac{\dfrac{\partial V_A}{\partial C_A} - \dfrac{\partial V_B}{\partial C_B}}{\dfrac{\partial V_A}{\partial D_A} - \dfrac{\partial V_B}{\partial D_B}} = P$$

Naturalmente, tenemos sólo cuatro ecuaciones en total para cinco incógnitas (puesto que no hemos optimizado P). Pero eso no implica que el sistema esa irresoluble porque, en realidad, sí existe una quinta ecuación. En efecto, debemos tener en cuenta que:

$$V_A (C_A, D_A) = V_A (\bar{C} - C_B, PC_B)$$

$$\frac{dV_A}{dC_B} = -\frac{\partial V_A}{\partial C_A} + \frac{\partial V_A}{\partial D_A}\left(P + \frac{dP}{dC_B} C_B\right) = 0$$

$$\frac{\dfrac{\partial V_A}{\partial C_A}}{\dfrac{\partial V_A}{\partial D_A}} = P + \frac{dP}{dC_B} C_B$$

Y, del mismo modo:

$$V_B (C_B, D_B) = V_B (C_B, \bar{D} - PC_B)$$

$$\frac{dV_B}{dC_B} = \frac{\partial V_B}{\partial C_B} - \frac{\partial V_B}{\partial D_B}\left(P + \frac{dP}{dC_B} C_B\right) = 0$$

$$\frac{\dfrac{\partial V_B}{\partial C_B}}{\dfrac{\partial V_B}{\partial D_B}} = P + \frac{dP}{dC_B} C_B$$

Con lo que, uniendo ambas fórmulas, obtenemos que:

$$\frac{\dfrac{\partial V_A}{\partial C_A}}{\dfrac{\partial V_A}{\partial D_A}} = \frac{\dfrac{\partial V_B}{\partial C_B}}{\dfrac{\partial V_B}{\partial D_B}} = P + \frac{dP}{dC_B} C_B$$

Y como substituyendo en la ecuación que antes habíamos obtenido de la Lagrangeana obtenemos que:

$$\frac{\dfrac{\partial V_A}{\partial C_A}}{\dfrac{\partial V_A}{\partial D_A}} = \frac{\dfrac{\partial V_B}{\partial C_B}}{\dfrac{\partial V_B}{\partial D_B}} = P$$

Tenemos, pues, cinco ecuaciones para cinco incógnitas y además, tal como ya habíamos demostrado por otro procedimiento, hemos obtenido que:

$$\frac{dP}{dC_A} = \frac{dP}{dC_B} = 0$$

Con lo que las conclusiones se revelan, como ya habíamos dicho, equivalentes a las de competencia perfecta.

Podría todavía objetarse que quizá después de todo sea este un ejemplo anómalo y excesivamente simplificado en el ámbito del intercambio puro; a cuanto opinen así (cosa, por otro lado, bastante lógica) les invito a pasar al Apéndice, donde expongo la demostración general para m individuos (1 ... m) y n+1 bienes (0 ... n, siendo 0 un bien cualquiera que tomaremos como numerario) bajo condiciones, como hasta aquí hemos visto, de intercambio puro (sin producción). Pero, naturalmente, lo que sí es cierto es que aquí hemos obviado el problema de la producción, y lo cierto es que la producción es la base de la mayoría de los mercados reales. No podemos, pues, dejar el tema sin hacer un esfuerzo por extender nuestras conclusiones al ámbito de la economía con producción.

II

Volvamos ahora a nuestros dos náufragos, Alberto y Bernardo, e imaginémosles esta vez atrapados los dos en la misma isla, sin palmeras pero con la posibilidad de sobrevivir gracias a las semillas de un tipo especial de planta, consumible directamente (sin necesidad de ningún tratamiento previo) y cuyo cultivo periódico no requiere (ni admite) inversión alguna de trabajo, sino únicamente la renuncia a una parte de las semillas de que se dispone en un período para poder plantarlas y producir más en el siguiente. En el fondo, pues, tenemos de nuevo dos únicos bienes: semillas-hoy y semillas-mañana, pues supondremos que los náufragos sólo planean en un período cara al siguiente (de otro modo el sistema se podría complicar con semillas-pasado-mañana, semillas-al-tercer-día, etc.). Así pues, llamaremos Q_A y Q_B a las cantidades iniciales (exógenas) de semillas de que disponen Alberto y Bernardo respectivamente, C_A y C_B a las que consumen en el primer período ("hoy"), K_A y K_B a las que dedican a producir y YA y YB a las que obtienen en el período siguiente ("mañana"). De ello se desprende, pues, que la inversión total y la producción total serán ([1] y [2]):

[1] $$K = K_A + K_B$$

[2] $$Y = Y_A + Y_B$$

Estableceremos también que la producción obedece a una función de producción continua y derivable de la forma siguiente:

[3] $$Y = f(K)$$

Por otro lado, desde el punto de vista contable tenemos de entrada dos identidades que expresan la igualdad entre la cantidad inicial de semillas de cada individuo y la suma de lo que consume en ese período más lo que invierte en el siguiente ([4] y [5]):

[4] $$Q_A = C_A + K_A$$

[5] $$Q_B = C_B + K_B$$

En segundo lugar, sabemos que, si P es el precio de una semilla-hoy expresado en términos de semillas-mañana (es posible que fuese más apropiado expresar esto mediante "i+1", pero prefiero mantener en lo posible la nomenclatura que he empleado hasta ahora), entonces ([6] y [7]):

[6] $$Y_A = PK_A$$

[7] $$Y_B = PK_B$$

¿Pero, si P es una incógnita, una variable cuyo valor ha de determinar el propio sistema, qué nos están indicando estas dos restricciones sino que la cantidad de semillas-mañana que reciba cada individuo será directamente proporcional a la cantidad de semillas-hoy que previamente ha sacrificado? Siendo así, lo lógico será que nos limitemos a expresar dicha relación ([6]):

$$[6] \quad \frac{Y_A}{K_A} = \frac{Y_B}{K_B} \qquad Y_A K_B = Y_B K_A$$

De este modo, optimizaremos sin incluir explícitamente la variable "precio", que podremos obtener posteriormente mediante la fórmula siguiente ([7]):

$$[7] \quad P = \frac{Y}{K} = \frac{Y_A}{K_A} = \frac{Y_B}{K_B}$$

Además, por supuesto, definiremos dos funciones de utilidad de cualidades idénticas a las que definimos para el mercado de intercambio puro ([8] y [9]):

$$[8] \quad V_A (C_A, Y_A)$$

$$[9] \quad V_B (C_B, Y_B)$$

Así como una nueva función U que las represente, tal como hicimos entonces, y a partir de la cual construiremos una Lagrangeana:

$$\text{ø} = U + \lambda_A (Q_A - (C_A + K_A)) + \lambda_B (Q_B - (C_B + K_B)) + $$
$$+ \mu (Y_A K_B - Y_B K_A) + \upsilon (Y - f(K))$$

que derivaremos respecto a C_A, C_B, K_A, K_B, Y_A y Y_B. Resolviendo, pues, obtendremos dos nuevas fórmulas ([10] y [11]):

$$[10] \quad \frac{\dfrac{\partial V}{\partial C_A} - \dfrac{\partial V}{\partial C_B}}{\dfrac{\partial V}{\partial Y_A} - \dfrac{\partial V}{\partial Y_B}} = P$$

$$[11] \qquad \frac{\dfrac{\partial V}{\partial C_A} K_A + \dfrac{\partial V}{\partial C_B} K_B}{\dfrac{\partial V}{\partial Y_A} K_A + \dfrac{\partial V}{\partial Y_B} K_B} = \frac{df}{dK}$$

Aquí *sí* hay una importante diferencia respecto a la solución de competencia perfecta. En efecto, en competencia perfecta cada individuo maximiza únicamente su propia utilidad, sujeta puramente a las restricciones que la afectan directamente y considerando todas las variables no ligadas directamente a este sistema como constantes. En el caso de Alberto:

$$\varnothing = V_A + \lambda (Q_A - (C_A + K_A) + \mu (Y_A - PK_A) + \upsilon (Y - f(K))$$

De lo que obtenemos (teniendo en cuenta que P, K_B y Y_B actúan como constantes) que:

$$\frac{\dfrac{\partial V_A}{\partial C_A}}{\dfrac{\partial V_A}{\partial Y_A}} = P = \frac{df}{dK}$$

y, como Bernardo sigue por su parte exactamente el mismo razonamiento, el resultado final será:

$$\frac{\dfrac{\partial V_A}{\partial C_A}}{\dfrac{\partial V_A}{\partial Y_A}} = \frac{\dfrac{\partial V_B}{\partial C_B}}{\dfrac{\partial V_B}{\partial Y_B}} = P = \frac{df}{dK}$$

Como sabemos que P = Y/K, esto sólo podrá cumplirse si Y/K = df/dK, es decir, si la función de producción es homogénea de grado 1 –si no es así, el problema carece de solución en competencia perfecta.

En cambio, en el sistema de información perfecta que hemos descrito existe siempre solución. En efecto, si la función de producción es efectivamente homogénea de grado 1, entonces:

$$\frac{\dfrac{\partial V_A}{\partial C_A} - \dfrac{\partial V_B}{\partial C_B}}{\dfrac{\partial V_A}{\partial Y_A} - \dfrac{\partial V_B}{\partial Y_B}} = \frac{\dfrac{\partial V_A}{\partial C_A} K_A + \dfrac{\partial V_A}{\partial C_B} K_B}{\dfrac{\partial V_A}{\partial Y_A} K_A + \dfrac{\partial V_B}{\partial Y_B} K_B} = \frac{df}{dK} = P$$

De lo que, despejando, se desprende que:

$$\frac{\dfrac{\partial V_A}{\partial C_A}}{\dfrac{\partial V_A}{\partial Y_A}} = \frac{\dfrac{\partial V_B}{\partial C_B}}{\dfrac{\partial V_B}{\partial Y_B}} = \frac{df}{dK} = P$$

Y, por lo tanto, el resultado es, una vez más, equivalente al de competencia perfecta. Pero, en cambio, si no es así *nada* obliga a que el precio sea igual a la productividad marginal, disponemos igualmente del mismo número de ecuaciones que de incógnitas y, por ende, no hay en principio nada que impida la determinación de un punto de equilibrio (salvo, naturalmente, que la forma de las curvas sea tal que impidan que el sistema tenga solución en algún caso concreto).

No voy a pasar esta vez a la demostración general, como hice con el caso de intercambio puro: preveo que sería extremadamente farragosa, así que prefiero dejarla para otra ocasión o, quizá mejor, para los matemáticos y los hombres de números que puedan encontrar ese tipo de ejercicio más atractivo de lo que lo encuentro yo. Me conformo, por ahora, con haber apuntado las bases de un instrumento teórico que considero de notable potencia y con haber propuesto una salida a dos problemas (por otra parte estrechamente relacionados entre sí) que nos llevaban persiguiendo desde hacía ya mucho tiempo, quizá demasiado.

APÉNDICE

De la misma manera que la demostración del caso particular, también la del caso general se puede llevar a cabo de dos maneras: por reducción al absurdo o bien mediante la optimización de una Lagrangeana. Pero tanto en un caso como en el otro, habremos de definir una nomenclatura apropiada, puesto que la que hasta ahora hemos visto resulta simple en exceso. Llamaremos, pues q_{ij} a la cantidad de un bien "i" de que dispone el individuo "j" como dotación inicial, y c_ij a la cantidad de ese bien "i" que finalmente consume. Consideraremos n+1 bienes (0 ... n), de entre los que el bien "0" será el que designaremos como numerario (siendo este en realidad un bien cualquiera que podemos incluso designar al azar), de tal manera que será el precio de una unidad del bien "i" expresado en términos de dicho numerario cuyo precio será, lógicamente, P_o = 1. También consideraremos m individuos (1 ... m). Sabiendo todo esto, pues, podremos definir las siguientes identidades contables ([1] y [2]):

$$[1] \qquad \sum_{j=1}^{m} (q_{ij} - c_{ij}) = 0 \qquad \forall \upsilon = 0 \ldots n$$

$$[2] \qquad \sum_{i=0}^{n} P_i (q_{ij} - c_{ij}) = 0 \qquad \forall \gamma = 1 \ldots m$$

Donde las identidades del tipo [1] hacen referencia a la igualdad entre la cantidad inicial y final de cada producto, mientras que las de tipo [2] expresan el equilibrio del balance de cada individuo. A todo esto habrá que añadir, naturalmente, m funciones de utilidad para los m individuos ([3]):

$$[3] \qquad V_i (c_{0j} \ldots c_{nj})$$

Así pues, si seguimos el método de reducción al absurdo, empezaremos por establecer que la derivada del precio respecto a cada una de las cantidades finalmente demandadas c_{ij} ha de ser, por lo menos, del mismo signo. Por lo tanto, si suponemos que estas derivadas son distintas de cero, entonces:

$$\frac{dc_{ij}}{dc_{ik}} \geq 0 \qquad \forall_i = 0 \ldots n \qquad \forall_{\gamma, k} = 1 \ldots m$$

Ahora bien, sabemos que:

$$\frac{dc_{ij}}{dc_{ik}} = \frac{d\left(\sum_{j=1}^{m} q_{ij} - (c_{ij} + \ldots + c_{ij-1} + c_{ij+1} + \ldots + c_{im})\right)}{dc_{ik}} =$$

$$= -\left(1 + \frac{dc_{ij}}{dc_{ik}} + \ldots + \frac{dc_{im}}{dc_{ik}}\right) \quad \left(\text{ya que } \frac{dc_{ik}}{dc_{ik}} = 1\right)$$

Según lo que hemos visto antes, todos los elementos del interior del paréntesis deberían ser positivos, pero si lo son entonces dejaría de serlo dc_{ij}/dc_{ik}, lo cual es igualmente absurdo. No nos queda, pues, otra alternativa que admitir que:

$$\frac{dP}{dc_{ij}} = \frac{dP}{dc_{lk}} = 0 \qquad \forall_{i,l} = 0 \ldots n \qquad \forall_{j,k} = 1 \ldots m$$

Francamente, no creo que sea necesario acudir de nuevo a la demostración mediante la Lagrangeana, que es mucho más pesada.

EDUARD GRACIA i RODRÍGUEZ